6ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Primeiro dia – 7 de outubro de 2016

1) Considere 10 inteiros positivos distintos que são todos primos entre si (isto é, não existe um fator primo comum a todos), mas tais que quaisquer dois deles não são primos entre si.
Qual é a menor quantidade de fatores primos distintos que podem aparecer no produto dos 10 números?

2) Duas circunferências se intersectam em A e B. Uma reta é tangente às duas circunferências nos pontos E e F. Suponha que A pertence ao interior do triângulo BEF. Sejam H o ortocentro do triângulo BEF e M o ponto médio do segmento BH. Mostre que M está na reta que passa pelo centro das duas circunferências.

Nota: O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas alturas.

3) Suponha que um número real α é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Considere, então, $G = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$. Dizemos que G é um *gingado* de α.
Por exemplo, como 2 é raiz de $P(x) = x^2 - x - 2$, $G = |1| + |-1| + |-2| = 4$ é um gingado de 2.
Qual é o quarto maior número real α tal que 3 é um gingado de α?

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos