



6ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Segundo dia – 8 de outubro de 2016

4) Oito seleções de futebol da CPLP disputaram um campeonato no qual cada time jogou uma única vez com cada um dos demais times. No futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e a seleção derrotada não pontua.

Nesse campeonato quatro seleções ficaram em primeiro lugar com 15 pontos e as outras quatro ficaram em segundo lugar com N pontos cada.

Sabendo que houve 12 empates durante todo o campeonato, determine N .

5) Uma sequência numérica é denominada *lusófona* se satisfaz as seguintes três condições:

i) O primeiro termo da sequência é o número 1.

ii) Para obter o próximo termo da sequência podemos multiplicar o termo anterior por um número primo positivo (2, 3, 5, 7, 11, ...) ou adicionar 1.

iii) O último termo da sequência é o número 2016.

Por exemplo: $1 \xrightarrow{\times 11} 11 \xrightarrow{\times 61} 671 \xrightarrow{+1} 672 \xrightarrow{\times 3} 2016$.

Quantas sequências lusófonas existem nas quais (como no exemplo acima) a operação adicionar 1 foi utilizada exatamente uma vez e não se multiplicou duas vezes pelo mesmo número primo?

6) Considere as potências de 2 com expoente inteiro positivo, ou seja, os números da forma 2^n em que n é um inteiro positivo: 2, 4, 8, 16, ...

Prove que toda potência de 2 com expoente inteiro positivo pode ser escrita na forma

$$5xy - x^2 - 2y^2$$

com x e y ímpares positivos.

Duração: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos